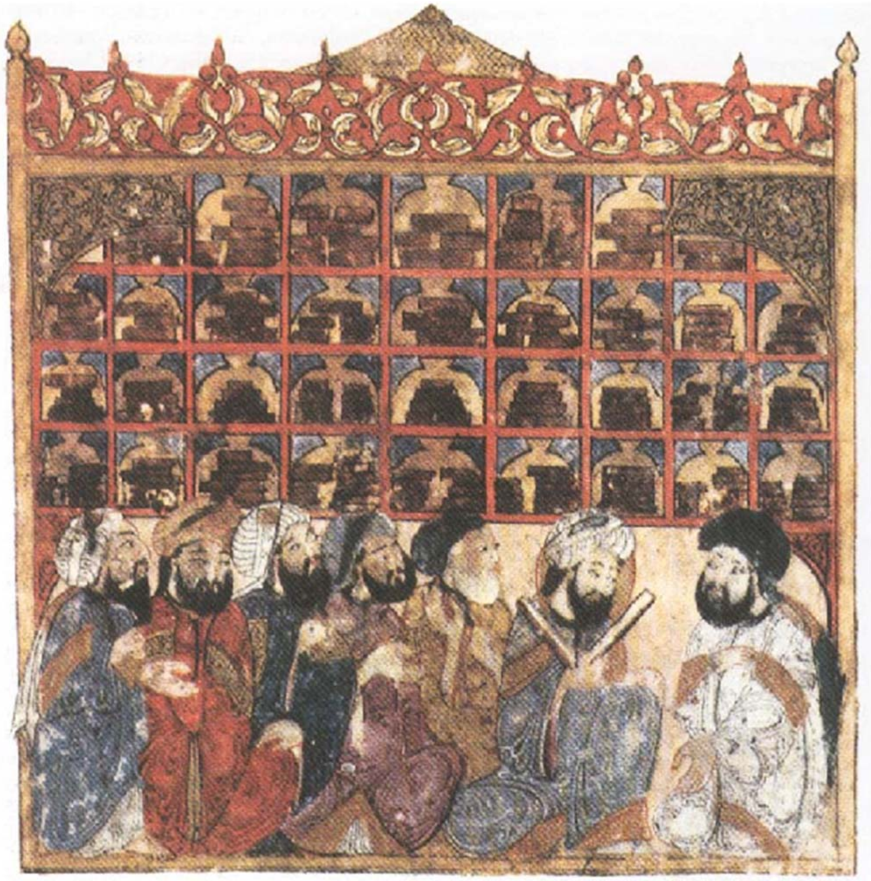
Omar Al-Khayyam, poeta matematico

Teatro e Scienza

Livia Giacardi, Torino, 16 ottobre 2017

La diffusione della civiltà islamica

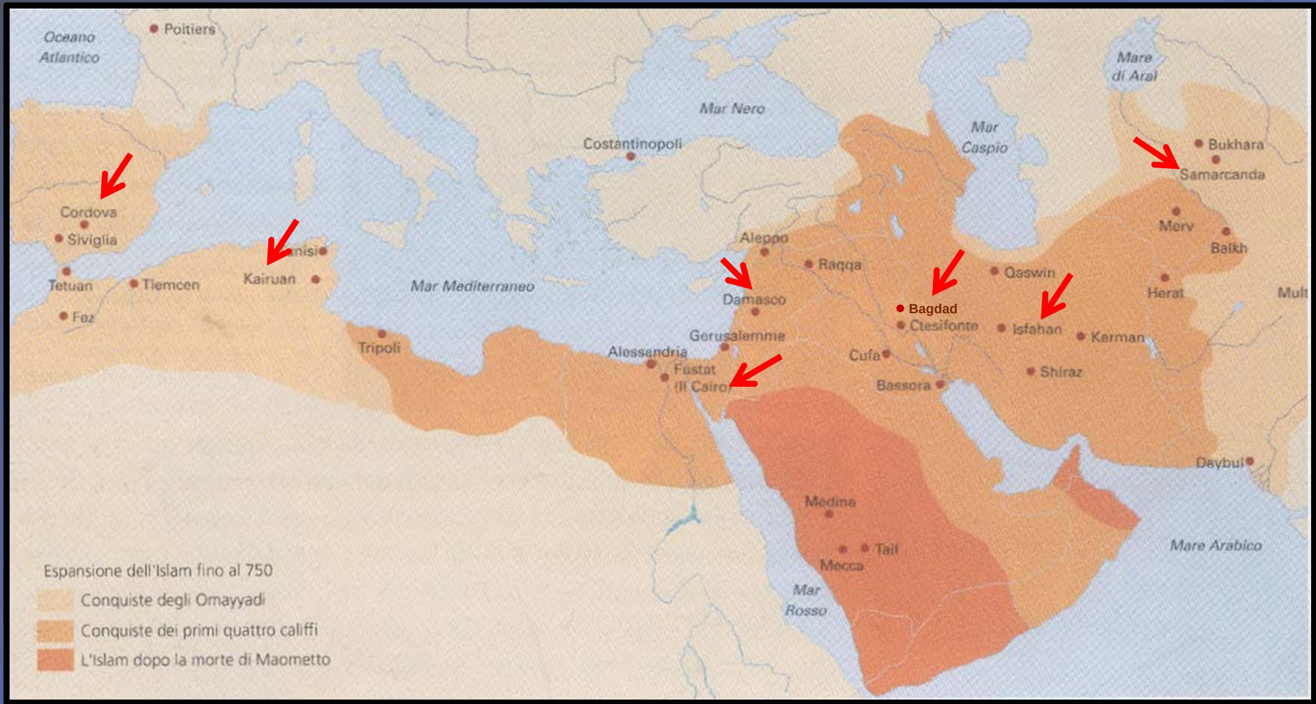
Dopo il V secolo, mentre in Occidente si assiste a un periodo di decadenza degli studi matematici, nel mondo islamico si verifica uno sviluppo notevole delle scienze e della matematica.



Nel *Corano*

“Il sapiente sorpassa il devoto come la luna nel plenilunio sorpassa tutti gli altri astri”

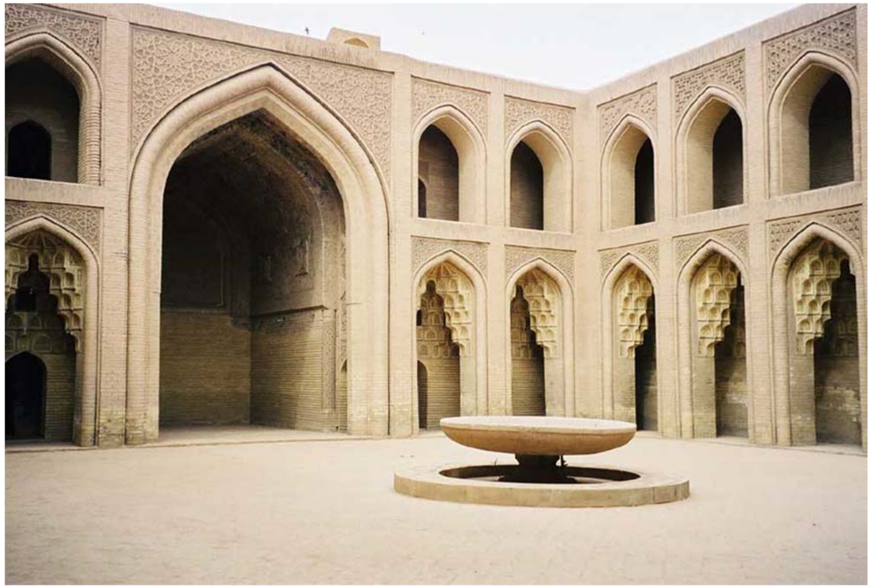
“Dio è il più rapido dei calcolatori”



La civiltà islamica, che si sviluppa a partire dal 622 (anno della fuga di Maometto a Medina), raggiunge il massimo splendore tra il IX e il XIII secolo.

Arabi , persiani, berberi, iberici

L'arabo, lingua della scienza



I matematici e gli scienziati islamici non solo diedero contributi importanti all'**algebra**, alla **trigonometria** e alla **geometria**, ma attraverso una fitta opera di **traduzioni dei classici greci** fecero sì che il sapere antico non andasse perduto.

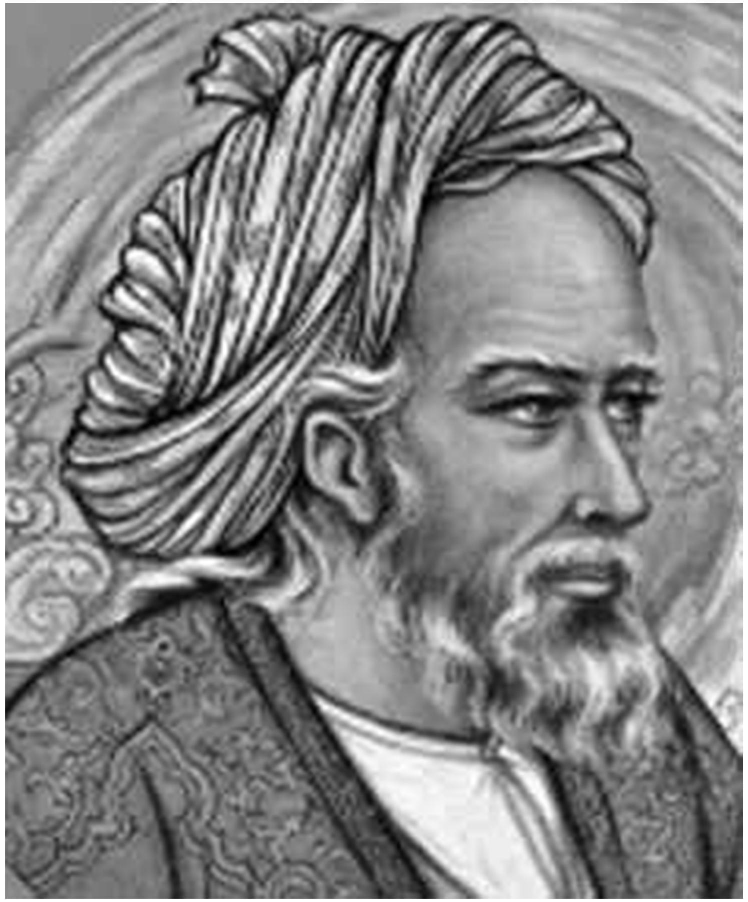
Il califfo **Hārūn al-Rashīd** intraprese la costruzione a Bagdad della **"Casa della saggezza"** (*Bayt al-Hikma*), che verso l'830 il figlio **al-Ma'mūn** completò facendone un centro di studi superiori che richiamava scienziati e letterati.

Fra di essi vi erano molti traduttori con il compito di tradurre dal greco i testi matematici e filosofici (Euclide, Archimede, Apollonio, Diofanto, Aristotele,…)

Il fiorire della traduzioni si verificherà anche in **Spagna** dopo la conquista araba (Cordova, Toledo, Saragozza, …)

Jamshīd Ghiyāth ad-Dīn al-Kāshī (m. 1429):

«A intervalli di pochi giorni Sua Maestà il Sovrano era presente nel circolo di studio, e quando era là, lo studio della matematica diventava prioritario, e anche questo umile servitore era presente. **Uno degli esami degli studenti consisteva in questo, che ognuno che entrava nel circolo di studio non sapeva quale problema doveva affrontare, mentre la gente della *madrasa* era esperta nello studio di esso.** Quando il problema fu enunciato, …, questo umile servitore entrò completamente (nell'argomento), poichè egli disse un numero di cose che non erano state chiarite prima, respinse obiezioni, e fece varie accurate puntualizzazioni di fronte alle quali tutti rimasero sbalorditi ».



Omar al-Khayyam

(Nishapur 1048 - Nishapur 1131)

Astronomo, matematico e poeta persiano, celebre per le sue *Quartine* *(Rubáiyát)*

Il tuo oggi non ha potere sul domani,
e il pensiero del domani non ti frutta che malinconia.
Non buttar via questo istante, se il tuo cuore non è pazzo,
ché questo resto di vita non si sa quanto possa valere.
(*Quartine*, p. 30)

1073-1074 – si stabilisce a Ispahan dove rimane circa 18 anni
lavora all'osservatorio astronomico locale e scrive testi matematici e filosofici

1092 – muore il suo mecenate, il sultano Malik Shāh, viene assassinato il suo protettore Nizāmal Mulk, la situazione di Omar al-Khayyam diventa precaria, vengono sospesi i fondi all'osservatorio.

Conosciamo poco sui decenni successivi fino alla sua morte a Nishapur nel **1131**.

«Non ebbi la possibilità di dedicarmi all'apprendimento di questa al-jabr e di concentrarmi su di essa a causa degli ostacoli nello scorrere del Tempo che mi frenarono; infatti noi siamo stati privati di tutti gli uomini di sapere eccetto per un piccolo gruppo, con molte difficoltà, la cui preoccupazione in vita è afferrare l'opportunità, quando il Tempo dorme, di dedicarsi alla ricerca e al perfezionamento di una scienza: ***perché la maggioranza della gente che imita i filosofi confonde il vero con il falso e usa le conoscenze scientifiche solo per scopi bassi e materiali;*** *e se essi vedono una certa persona che cerca ciò che è giusto e preferisce la verità …lo considerano un folle e si prendono gioco di lui»*

Contributi:

Poesia, filosofia, musica, fisica, astronomia e matematica.

In astronomia diresse due progetti: realizzazione di tavole astronomiche raccolte nell'opera *Zīj Malik Shābī;* riforma del calendario, progetto incompiuto.

In matematica:

Aritmetica: calcolo delle radici *n*-esime di un numero

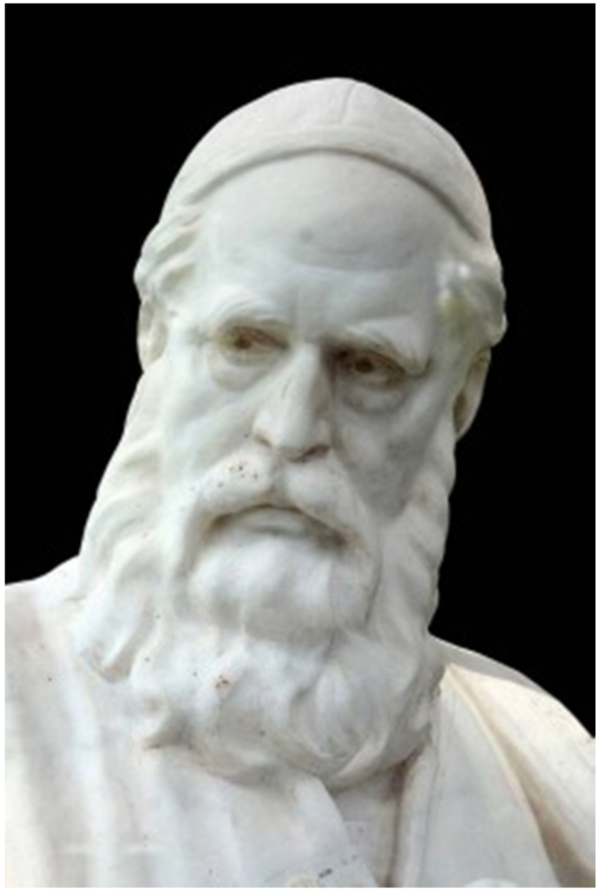
« Gli Indiani hanno il loro metodo per estrarre i lati di quadrati e cubi basati sull'indagine di un piccolo numero di casi, mediante la conoscenza dei quadrati dei nove interi, 1, 2, 3 … ecc… Io ho scritto un libro per dimostrare la validità di quei metodi… e ***ho trovato anche i lati del quadrato di un quadrato, e del quadrato-cubo, cubo-cubo, …cosa che nessuno aveva fatto prima****…»*

Algebra: risoluzione delle equazioni di terzo grado

Geometria: discussione del postulato delle parallele

Teoria delle proporzioni: discussione della definizione euclidea (V libro *Elementi*)

Omar al-Khayyam
e i fondamenti della geometria



Diversi orientamenti della geometria nell'Islam

1. risoluzione di problemi insolubili con riga e compasso mediante uso di sezioni coniche ⟹ risoluzione geometrica dell'equazioni di terzo grado
2. studio di curve note e di nuove curve come oggetti di indagine in se stesse
3. calcolo di aree e volumi con metodi di tipo archimedeo
4. studio dei fondamenti della geometria
5. uso della geometria nell'arte ⟹ collaborazione fra artisti artigiani e matematici

«La geometria è la base per l'architettura; è per questo che il ***geometra con la sua scienza costituisce le fondamenta.*** *Egli è seguito dal capomastro che, a sua volta, è seguito dal muratore. Il geometra dirige il capomastro e lui dirige il muratore mentre si dà da fare con l'acqua e l'argilla »* [Al-Isfizarī, (11^e-12^e s.]

Diversi orientamenti della geometria nell'Islam

1. risoluzione di problemi insolubili con riga e compasso mediante uso di sezioni **coniche** $\Rightarrow$ **risoluzione geometrica dell'equazioni di terzo grado**

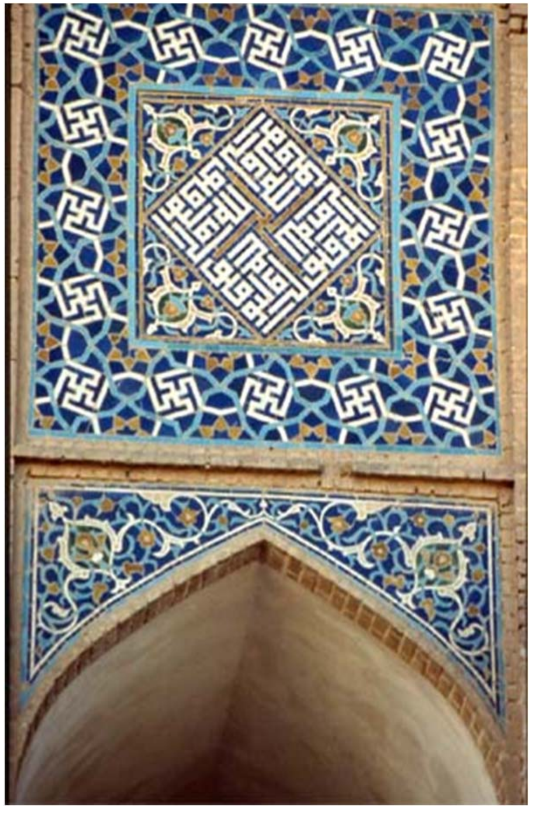
2. studio di curve note e di nuove curve come oggetti di indagine in se stesse

3. calcolo di aree e volumi con metodi di tipo archimedeo

4. **studio dei fondamenti della geometria**

5. uso della geometria nell'arte $\Rightarrow$ collaborazione fra artisti, artigiani e matematici

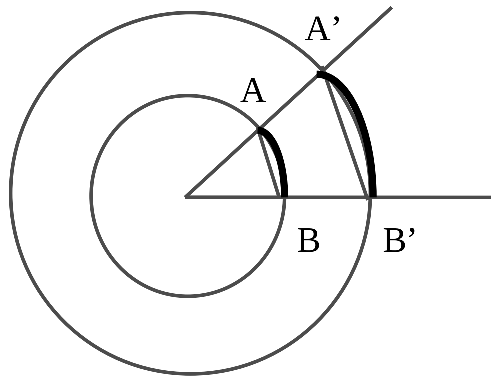
«La geometria è la base per l'architettura; è per questo che il ***geometra con la sua scienza costituisce le fondamenta.*** *Egli è seguito dal capomastro che, a sua volta, è seguito dal muratore. Il geometra dirige il capomastro e lui dirige il muratore mentre si dà da fare con l'acqua e l'argilla »* [Al-Isfizarī, (11e-12e s.]



Omar al-Khayyam, *Discussione sulle difficoltà di Euclide. Sulla verità delle parallele e sulla discussione del famoso dubbio*
pubblicato per la prima volta nel 1936 in arabo e poi nel 1959 in inglese

Al- Khayyam distingue due tipi di dimostrazione:

- "dimostrazione del che cosa" (*burhame inna*) dimostrazione di esistenza, che significa rendere intuitivamente accettabile la proposizione. Per esempio per "dimostrare" che due rette si allontanano a partire dal punto di intersezione, egli considera due cerchi concentrici dove A'B'>AB. Si tratta di una dimostrazione filosofica, una "simil-dimostrazione".



- "dimostrazione del perché" a differenza della prima è una vera dimostrazione prettamente matematica (*burhan hikmi*).

Per Al-Khayyam, come fu per molti secoli ancora, il V postulato è un teorema di geometria che deve, come tale, essere dimostrato.

Dopo un'analisi storica dei precedenti tentativi di dimostrazione del V postulato, Al-Khayyam sviluppa la sua teoria delle parallele.
Parte da 5 postulati fra i quali svolge un ruolo importante il IV :

. L'assioma di Eudosso-Archimede

. Due rette non possono racchiudere una superficie

. Se due rette tagliate da una secante divergono da una parte della secante, non possono convergere da questa stessa parte. Allo stesso modo se convergono da una parte non possono divergere da questa stessa parte

. Due rette che si intersecano divergono a partire dal loro punto di intersezione e due rette convergenti si intersecano e non possono divergere nella direzione della convergenza

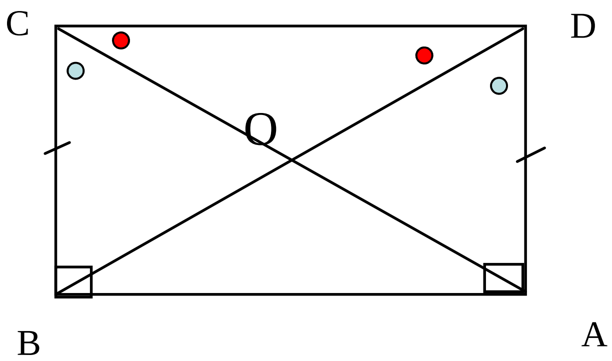
. Due rette perpendicolari a una stessa retta non possono divergere o convergere né dall'una né dall'altra parte di questa retta.

In base a questi dimostra **8 teoremi**, l'ultimo dei quali è la sua dimostrazione del V postulato (viziata dall'uso di un postulato equivalente a quello da dimostrare), teoremi che dovrebbero essere aggiunti alle prime 28 proposizioni del I libro degli *Elementi*.

Parte dalla considerazione di un **quadrilatero birettangolo isoscele** ABCD, in cui cioè gli angoli A e B siano retti ed i lati AD e CB siano uguali.

Teorema I

Nel quadrilatero birettangolo isoscele gli angoli BCD e ADC sono uguali.



Al-Khayyam non si serve qui del V postulato e lascia pertanto aperte tre possibilità:

C=D=1R	***ipotesi dell'angolo retto***
C=D<1R	***ipotesi dell'angolo acuto,***
C=D>1R	***ipotesi dell'angolo ottuso.***

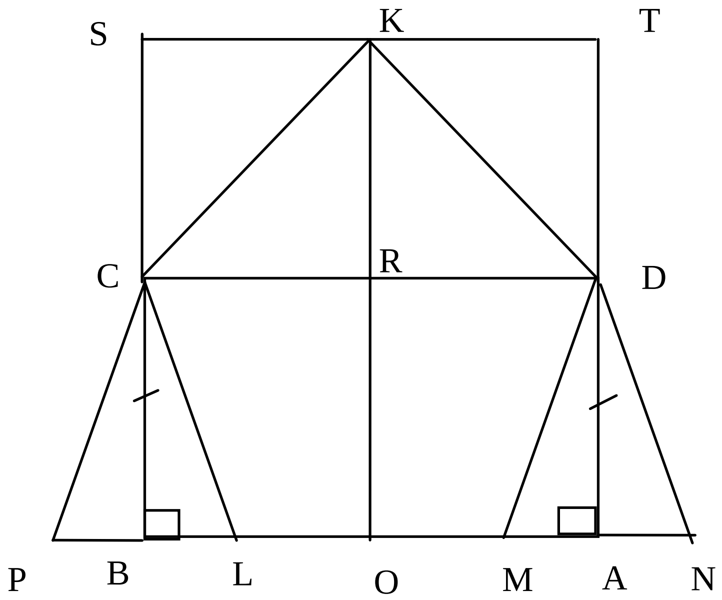
G. SACCHERI, *Euclides ab omni naevo vindicatus* (1733)

Il punto centrale della trattazione è il teorema III
dove Al-Khayyam prende in considerazione le tre ipotesi:

C=D=1R, C=D>1R e C=D<1R

e **ritiene di ottenere una contraddizione da quella dell'angolo acuto e da quella dell'angolo ottuso.**

Ipotesi: **AO=OB e OR perpendicolare a AB**
Tesi: **ADC=BCD=1R**



Sul prolungamento di OR si prenda K tale che RK=RO, la perpendicolare in K a OR intersecherà i prolungamenti di AD e BC in T e S rispettivamente. Si faccia ora ruotare il quadrilatero CSTD attorno a CD:

- **nell'ipotesi dell'angolo acuto; se cioè SCR>BCR, nella rotazione ST si sovrapporrà a PN>AB**
- **nell'ipotesi dell'angolo ottuso; se cioè SCR<BCR, nella rotazione ST si sovrapporrà a LM<AB.**

Questo contraddice il postulato 5. di Omar Al-Khayyam secondo cui le due perpendicolari BS e AT ad AB sono equidistanti e cioè "non possono convergere né divergere".

Perché è interessante la critica di Al Khayyam

- cerca di stabilire un'assiomatica il più completa possibile perché serva da fondamento alla teoria delle parallele;

- riconosce il legame tra il postulato delle parallele e la somma degli angoli interni di un quadrilatero;

- tenta di respingere l'ipotesi dell'angolo ottuso e quella dell'angolo acuto riconducendole ad una contraddizione;

- stabilisce, nel teorema III, le prime proposizioni di geometria non-euclidea, credendo di essere giunto a una contraddizione.

Youschevitch, p. 122

Omar al-Kayyam
Algebra e Geometria

Muhammed ibn Musa al-Khwarizmi (780-850), è considerato il padre dell'algebra. Nell'opera ***Al-kitab al-mukhtasar fi hisab al-jabr wa'l-muqabalah***" (830 circa) classifica le equazioni di 2° grado, le risolve e ne discute la risolubilità.

A lui si deve anche la prima esposizione del sistema di numerazione indiano decimale posizionale e delle operazioni in un'opera che ci è pervenuta solo nella versione latina ***Algoritmi de numero indorum***

Omar al Khayyam (1048-1131) nell'opera ***Sulle dimostrazioni di al-jabr e al-muqabala*** ci dà la seguente definizione di algebra:

"L'arte dell' ***al-jabr*** *e dell'****al-muqabala*** *è un'arte scientifica il cui oggetto è il numero puro e le grandezze misurabili in quanto incognite, ma rapportate ad una cosa nota, mediante la quale le si può determinare."*

al-jabr
(completamento)

$$2x^2 + 68 - 10x = 58$$

si eliminano i termini negativi

$$2x^2 + 68 - 10x + 10x = 58 + 10x$$

al-muqabala
(bilanciamento)

$$2x^2 + 10 = 10x$$

si addizionano i termini simili

Omar al-Khayyam, *Sulle dimostrazioni di al-jabr e al-muqabala*

Con al-Khayyam l'algebra diventa la **teoria generale delle equazioni algebriche** di grado minore o uguale a tre e con coefficienti interi positivi
I risultati più importanti ottenuti da al-Khayyam si possono così riassumere

- ✓ Osserva il principio di omogeneità dimensionale tra le grandezze
- ✓ Per le equazioni di terzo grado non riconducibili ad equazioni di secondo, riconoscendo il suo fallimento nella ricerca delle radici per via algebrica, ricava le soluzioni per via geometrica mediante intersezione di coniche
- ✓ Considera solo le soluzioni positive (non le radici negative) delle quali discute le condizioni di esistenza
- ✓ Nonostante l'analisi sia profonda e dettagliata gli sfugge il caso della terza soluzione positiva dell'equazione $x^3 + bx = ax^2 + c$

Classifica le equazioni secondo il numero di monomi che le compongono, in particolare suddivide le equazioni di terzo grado in binomie, trinomie e quadrinomie, come segue (a, b, c costanti e positive):

- equazione binomia $x^3 = c$

- equazioni trinomie senza termine di secondo grado I. $\begin{cases} x^3 + bx = c \\ x^3 + c = bx \\ bx + c = x^3 \end{cases}$

- trinomie senza termine di primo grado II. $\begin{cases} x^3 + ax^2 = c \\ x^3 + c = ax^2 \\ ax^2 + c = x^3 \end{cases}$

- quadrinomie in cui tre termini positivi sono uguali ad un termine positivo

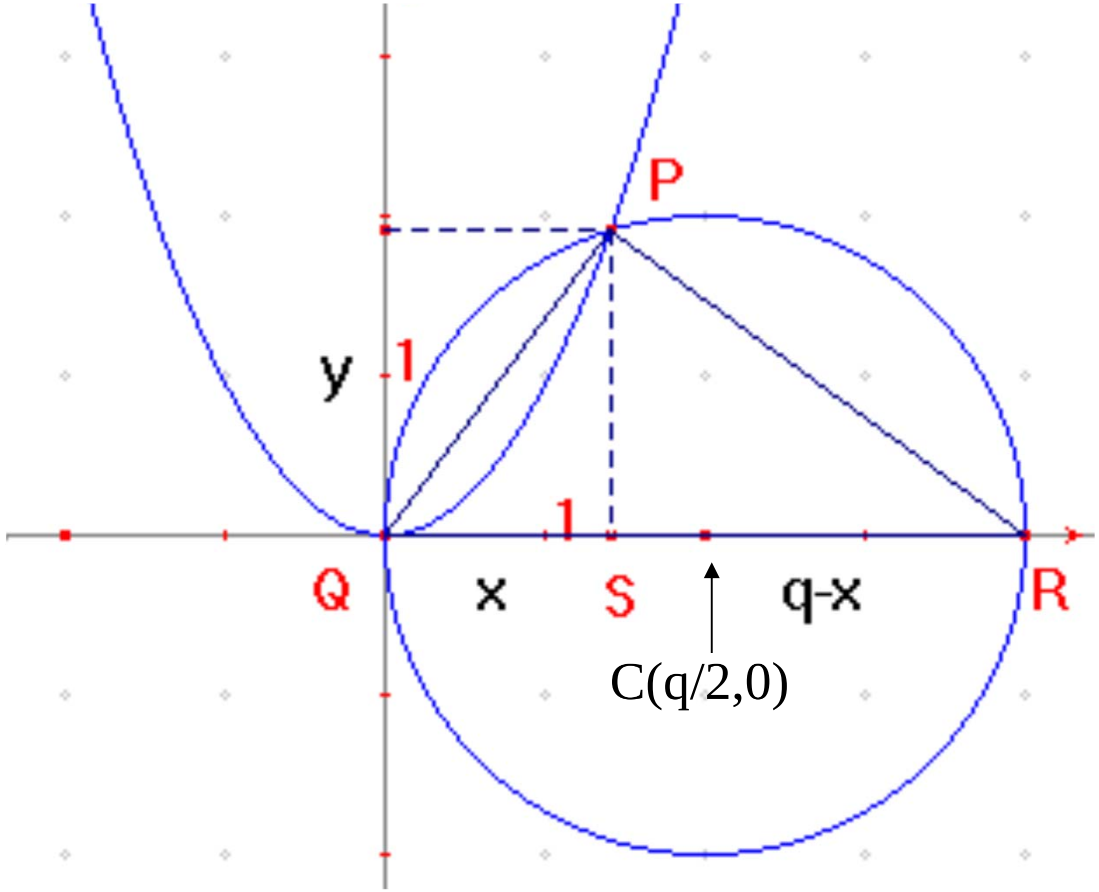
I. $\begin{cases} x^3 + ax^2 + bx = c \\ x^3 + ax^2 + c = bx \\ x^3 + bx + c = ax^2 \\ ax^2 + bx + c = x^3 \end{cases}$

- quadrinomie in cui due termini positivi sono uguali a due termini positivi

II. $\begin{cases} x^3 + ax^2 = bx + c \\ x^3 + bx = ax^2 + c \\ x^3 + c = ax^2 + bx \end{cases}$)

L'equazione trinomia del I tipo $x^3 + bx = c$**,**
("un cubo più lati sono uguali a un numero") viene scritta come
$x^3 + p^2x = p^2q$ con $b = p^2$ e $c = p^2q$ per il principio di omogeneità dimensionale.
La risoluzione si ottiene per intersezione
della circonferenza $x^2 + y^2 = q\,x$ e della parabola $y = x^2/p$.

L'ascissa QS del punto P di intersezione delle curve rappresentate in figura è la radice cercata.



Al-Khayyam non scrive equazioni, ma usa le proporzioni

Al-Khayyam dà una dimostrazione di tipo sintetico utilizzando la teoria delle proporzioni.
Applica la proprietà della parabola data da Apollonio:

$$\frac{x}{PS} = \frac{p}{x} \qquad (1)$$

Considera ora il triangolo rettangolo QPR, la sua altezza PS è media proporzionale fra QS e RS:

$$\frac{x}{PS} = \frac{PS}{q-x}$$

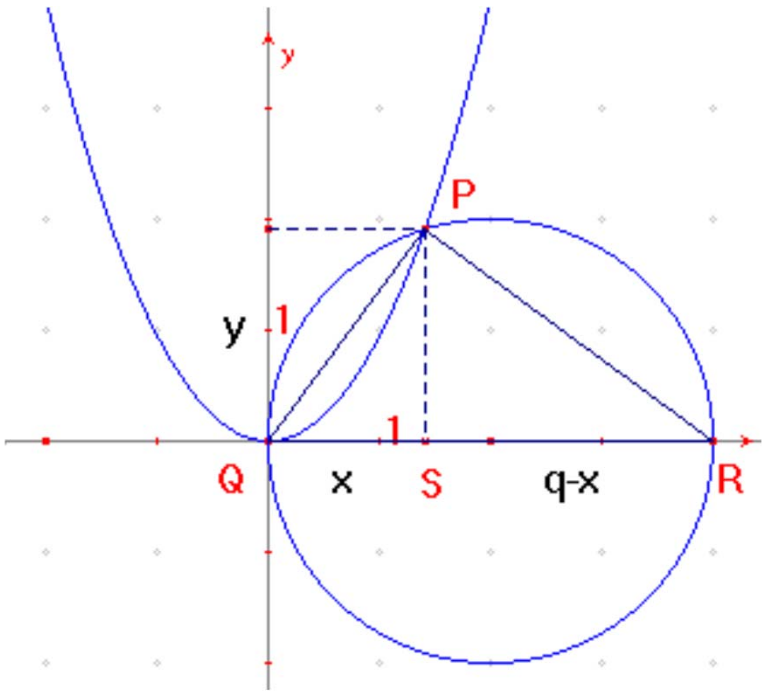
Uguagliando le espressioni precedenti ricava:

$$\frac{p}{x} = \frac{PS}{q-x} \qquad (2)$$

D'altra parte dalla (1) $PS = x^2/p$ che sostituito nella (2) fornisce l'equazione

$$x^3 + p^2x = p^2q$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = qx \\ y = \dfrac{x^2}{p} \end{cases}$$



Guai a quel cuore in cui non è ardor di passione,
che non è pazzo per l'amore d'una bella persona.
Un giorno che tu abbia trascorso senza amore,
non v'è per te altro giorno più perduto di quello.
(*Quartine,* p. 29)

Indicazioni bibliografiche

BONOLA, R., *La geometria non-euclidea,* Bologna Zanichelli, 1906

DJEBBAR, A., *Storia della scienza araba*, Milano, Cortina, 2002

JAOUICHE, K.*, La théorie des parallèles eu pays d'Islam,* Paris Vrin, 1986 (con testi tradotti in francese).

YOUSCHKEVITCH, A., *Les mathématiques arabes*, Paris 1976

YOUSCHKEVITCH, A., ROSENFELD, B. A., Al-Khayyāmi, Dictionary of Scientific Biography, vol.7, pp. 323-334.

ROERO, S., *Algebra e aritmetica nel medioevo islamico*, in E. Giusti (a cura di) *Un ponte sul mediterraneo. Leonardo Pisano,* Il Giardino di Archimede, Firenze, 2002, pp. 7-43

Le fonti

AL KHWARIZMI, *Le commencement de l'algèbre*, a cura di Rashed, Paris, Blachard, 2007

AL KHAYYAM, O., *L'oeuvre algébrique, etablie, traduite et analysée par* R. Rashed et A. Djebbar, Paris 1979

AL KHAYYAM, O., *Quartine*, Newton Compton Editori, Roma 1976

AMIR-MOEZ, A., (1958), *Discussion of Difficulties in Euclid,* Scripta Mathematica, 24 1959, pp. 275-303

Appendici

Poche informazioni sull’insegnamento delle scienze
Insegnamento primario: non divenne mai un’istituzione centrale
- pubblico, impartito nelle moschee,
- privato, nelle abitazioni dei mercanti, principi, … che pagavano i precettori

Formazione di base: **lingua araba, recitazione del Corano, istruzione religiosa**
Accanto a queste materie spesso si insegnava grammatica e calcolo
Riguardo al metodo, lo storico Ibn Khaldun criticava l’eccessivo appello alla memoria e la tendenza a formare “teste ben piene”.

Non si sa fino a che età si prolungasse l’insegnamento primario e se esistesse un insegnamento secondario in preparazione a quello specialistico

- **Fino al secolo XI** l’istruzione superiore era caratterizzata da un insegnamento privato finanziato da mecenati, i programmi non erano codificati, ma matematica, astronomia, filosofia avevano un posto privilegiato. Sorsero biblioteche che spesso diventavano centri di insegnamento superiore.

- **A partire dal 1055** vennero istituite scuole superiori di stato, *madrasa,* finanziate unicamente dallo stato che sceglieva gli insegnanti e i programmi allo scopo di preservare la purezza della religione islamica. **La matematica e le scienze avevano solo un ruolo ausiliario.**
L’insegnamento era orale basato su **lettura, dettatura e memorizzazione**.

[Djebbar 2002]

al-Khwarizmi, *Quadrati e numeri uguali a radici*

“…un quadrato e 21 unità uguali a 10 radici.	*Traduzione simbolica*	*Formalizzazione* $x^2 + s = px$
La regola risolutiva è la seguente:	$x^2 + 21 = 10x$	$p : 2$
dividi per 2 le radici, ottieni 5.	$10 : 2 = 5$	$\frac{p}{2} \cdot \frac{p}{2} = \left(\frac{p}{2}\right)^2$
Moltiplica 5 per se stesso, hai 25.	$5 \cdot 5 = 25$	
Sottrai 21 che è sommato al		
quadrato, resta 4. Estrai la radice,	$25 - 21 = 4$	$\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - s}$
che dà 2 e sottrai questo dalla metà	$\sqrt{4} = 2$	
della radice, cioè da 5, resta 3.	$5 - 2 = 3$	
Questa è la radice del quadrato che	$x = 3$	$x = \frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - s}$
cerchi e il suo quadrato è 9.	$x^2 = 9$	
Se lo desideri, aggiungi quella alla		
metà della radice.	$5 + 2 = 7$	$x = \frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - s}$
Ottieni 7, che è la radice del	$x = 7$	
quadrato che cerchi e il cui	$x^2 = 49$	
quadrato è 49."		

Come si vede egli ottiene le **due soluzioni positive** dell’equazione, alle quali affianca il seguente commento:

…Se tu affronti un problema che si riconduce a questo tipo di equazione, verifica l'esattezza della soluzione con l'addizione, come si è detto. Se non è possibile risolverlo con l'addizione, otterrai certamente il risultato con la sottrazione. Questo è il solo tipo in cui ci si serve dell'addizione e della sottrazione, cosa che non trovi nei tipi precedenti.

$$\left(\frac{p}{2}\right)^2 > s$$

$\rightarrow$ **Δ>0** due soluzioni reali

Devi inoltre sapere che se in questo caso tu dividi a metà la radice e la moltiplichi per se stessa e il prodotto risulta minore del numero che è aggiunto al quadrato, allora il problema è impossibile.

$$\left(\frac{p}{2}\right)^2 < s$$

$\rightarrow$ **Δ<0** nessuna soluzione reale

Se invece risulta uguale al numero, ne segue che la radice del quadrato sarà uguale alla metà delle radici che sono col quadrato, senza che si tolga o si aggiunga qualcosa.

$$\left(\frac{p}{2}\right)^2 = s$$

$\rightarrow$ **Δ=0** due soluzioni reali coincidenti

DIMOSTRA IN MODO GEOMETRICO, SEPARATAMENTE, LE DUE SOLUZIONI